Algebra1 10. házi c) feladat megoldása

2017. december 8.

ÁMEN[1] $x_0 = 0$, $a = -1, b = 1$.

↯ Tegyük fel, hogy ez főideál, egy elem által generált, legyen ez $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$.

Ekkor $f(0) = 0$, mert különben maga f nem lenne az ideálban. Sőt, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, mivel több helyen meg nem lehet 0 (például akkor az x függvényt nem generálná).

Szóval f

- folytonos,
- $f(0) = 0$,
- $f(x) \neq 0$ ha $x \neq 0$.

Ekkor

$$g(x) := \sqrt{|f(x)|}$$

is folytonos és csak a 0-ban 0. Ezek szerint $g \in (f)$, vagyis létezik h folytonos függvény, hogy $g = f \cdot h$:

$$\begin{aligned}
\exists h : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R} \text{ folytonos úgy, hogy } f(x) \cdot h(x) &= g(x) && \forall -1 \leq x \leq 1 \\
f(x) \cdot h(x) &= \sqrt{|f(x)|} \\
&\Downarrow \\
h(x) &= \frac{\sqrt{|f(x)|}}{f(x)} && \forall x \neq 0 \\
h(x) &= \frac{1}{\pm\sqrt{|f(x)|}} && \forall x \neq 0
\end{aligned}$$

De ekkor

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{0_{\pm}}$$

ami vagy nem létezik, vagy végtelen, így h nem lehet folytonos. ↯[2]

[1] Általánossg MEgszorítása Nélkül

[2] Itt a korrektséghez hozzá tartozik az a magyatázat, hogy erre hogyan lehet rájönni. Úgy, hogy ha ezt az ideált egy függvény generálná, akkor az azt is megkötné, hogy az ő függvény-többszörösei milyen gyorsan tartsanak 0-ba. De minden 0-ba tartó függvényhez kostruálható nála lassabban 0-ba tartó függvény.