4. házi feladat megoldások

Algebra1 – matematika Bsc

határidő: 2017.10.11 23:59

1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy (csoportok esetén) ha $A, B \lhd G$ és $A \subseteq B$, akkor $A \lhd B$.*

Megoldás. Ehhez kell, hogy

1. $A \leq B$
   - $A \lhd G \Rightarrow A \leq G \Rightarrow A$ a műveletekre zárt
   - tudjuk, hogy $A \subseteq B$

   ✓
2. $bAb^{-1} \subseteq A$ $(\forall b \in B)$
   - $A \lhd G \Rightarrow \forall g \in G$ esetén $gAg^{-1} \subseteq A \Rightarrow \forall g \in B$ esetén $gAg^{-1} \subseteq A$
     Mert ugye $B \subseteq G$.

   ✓

□

2. Feladat. *Mutassnuk olyan A, B és G csoportokat, hogy $A \lhd B \lhd G$, de $A \not\lhd G$.*

Megoldás. Legyen $S_4 \rhd A_4 \rhd K \rhd C_2 \rhd \{e\}$ a negyedik szimmetrikus csoport feloldása, amit gyakorlaton végignéztünk (K a Klein csoport, C_2 a K egy tetszőleges, nem egység eleme által generált két elemű csoport. Például $C_2 = \{e, (12)(34)\}$.

Itt az első két normálosztót úgy találtuk meg, hogy azok az S_4 normálosztói. Ezért $S_4 \rhd K$ és $|K : C_2| = 2 \Rightarrow K \rhd C_2$. De $S_4 \not\rhd C_2$ mert az összes normálosztót megkerestük a konjugált osztályokkal és ez nem volt köztük. De be is lehet látni külön.

$$\underbrace{(132)}_{g^{-1}}(12)(34)\underbrace{(123)}_{g} = (13)(24) \notin \{e, (12)(34)\}$$

□

3. Feladat.

a) Mutassnuk olyan A és G csoportokat, hogy $A \leq G$ és A Ábel féle, de $A \not\lhd G$.

b) Mutassnuk olyan A és G csoportokat, hogy A valódi normál osztója G-nek és A nem Ábel féle.

Megoldás.

a) Az előző feladatban $S_4 \geq \{e, (12)(34)\}$ és mivel az utóbbi 2 elemű, így ciklikus, így Ábel. De az is volt, hogy nem normálosztó.

b) Az előző feladatban $S_4 \rhd A_4$ a páros számú cserékkel elvégezhető permutációk csoportja. Ez nem Ábel.

$$\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$$

$\square$

4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy feloldható csoport faktorcsoportja is feloldható, azaz:*

$$(G \text{ feloldható és } N \lhd G) \Rightarrow G/N \text{ feloldható}$$

Megoldás. Legyen $G \rhd N \rhd \{e\}$ egy normállánc.
Mivel G feloldható, ezért legyen neki egy feloldása. A Schreier finomítási tétel miatt létezik ezeknek közös finomításuk, azaz

$$G \rhd N \rhd \{e\} \to \qquad G \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \ldots \rhd \underbrace{H_l}_{=N} \rhd H_{l+1} \rhd \ldots \rhd H_m = \{e\} \tag{1}$$

$$G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{k-1} \rhd G_k = \{e\} \to \qquad G \rhd K_1 \rhd K_2 \rhd \ldots \rhd \underbrace{K_{n_1}}_{=G_1} \rhd \ldots \rhd \underbrace{K_{n_2}}_{=G_2} \rhd \ldots \rhd \underbrace{\{e\}}_{=K_{n_k}} \tag{2}$$

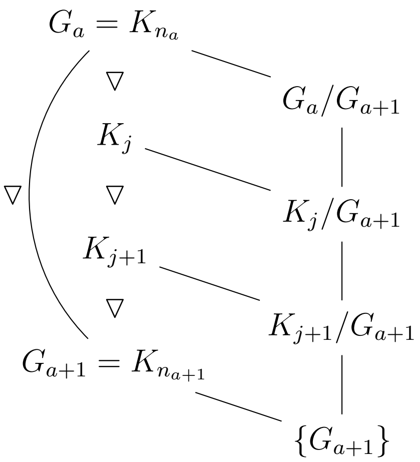
A két finomítás ekvivalens, azaz
$$H_i/H_{i+1} \simeq K_j/K_{j+1} \tag{3}$$
egy alkalmas $i \leftrightarrow j$ index permutációval.

Eddig volt az ötlet, innentől csak figyelni kell!

Tudjuk, hogy $G \rhd G_1 \ldots G_k$ feloldás, azt szeretnénk, hogy (1) is feloldás legyen.

i) Belátjuk, hogy bármilyen feloldás finomítása feloldás. Így $G \rhd K_1 \ldots K_{n_k}$ feloldás lesz.

- Vizsgáljuk meg (2) egy szeletét, lásd 1 ábra.



1. ábra.

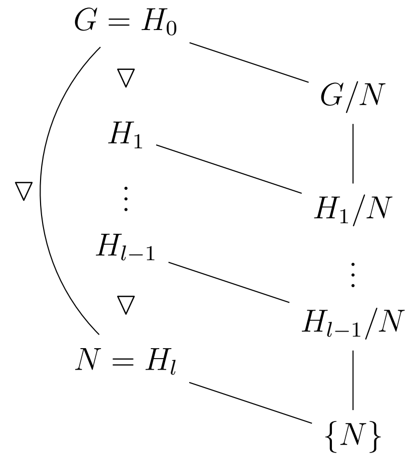
- Mivel G_a/G_{a+1} Ábel, így minden részcsoportja és azok faktorai is Ábel csoportok. Így
$$K_j/K_{j+1} \overset{\text{II. izom.}}{\simeq} K_j/G_{a+1} \Big/ K_{j+1}/G_{a+1} \leftarrow \text{ Ábel}$$
Vagyis K_j/K_{j+1} Ábel.

- ✓ feloldás finomítása feloldás

ii) A finomítások ekvivalenciája miatt (1) is feloldás lesz.

iii) Ebből megadjuk N és G/N feloldását is.

- Máris leolvasható az (1) feloldásból az N feloldása.
- Az i) ponthoz hasonlóan nézzük most (1) egy szeletét, lásd a 2 ábrán. Mivel a H_i/H_{i+1}



2. ábra.

Ábel (minden i-re), így $H_i/N \Big/ H_{i+1}/N$ is Ábel, így G/N feloldását is kapjuk.

Figyelem, az ábrákon a természetes homomorfizmusról szóló tétel van szemléltetve. Ezek ahhoz kellenek, hogy a II. izomorfizmus tételt alkalmazhassuk. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy ez a feladat egyszerűbb, ha G véges, mert akkor feltehetjük, hogy a feloldás egyben kompozíciólánc is (érdemben tovább nem finomítható). Ezt is elfogadtam a háziban. A bizonyítás lényegében ugyan az, de ahhoz hogy végtelen csoportra is működjön, ki kell részletezni.

Normállánc definíció szerint véges sok „szemből" áll, de a faktorai lehetnek végtelen csoportok. Sőt, végtelen csoportnak lehet végtelen lépésből álló lánca, de azt nem hívjuk normálláncnak. Végtelen csoportnak nem feltétlenül van kompozíciólánca, viszont lehet olyan feloldása, amiben a faktorok végtelen csoportok.