2. ZH megoldások
Algebra1 – Matematika BSc

1. Feladat.

$$K, H \in Syl_p(G) \Rightarrow \exists g \in G \ hogy \ gKg^{-1} = H$$

Ekkor

$$\varphi : K \mapsto H$$
$$\varphi(a) := gag^{-1}$$

Ez belátható, hogy izomorfizmus (bijektív homomorfizmus). □

2. Feladat. $56 = 2^3 \cdot 7$, $x := |Syl_2(G)|$, $y := |Syl_7(G)|$

$$x \equiv 1 \mod 2 \qquad\qquad x \mid 56$$
$$y \equiv 1 \mod 7 \qquad\qquad y \mid 56$$

Ebből $x = 1$ *v.* $x = 7$ *és* $y = 1$ *v.* $y = 8$.

Ha $y = 1$, *akkor a* 7*-Sylow normálosztó* ✓

Ha $y = 8$, *akkor a* 8 *darab* 7*-Sylow van, mindegyik 7 elemű és az egység az egyetlen közös elemük. Ekkor a* 7*-Sylowokon kívül már csak 7 elem van, melyek az egységgel pont egy* 2*-Sylowot tesznek ki. Vagyis egy* 2*-Sylow van* ✓. □

3. Feladat. *Ez előző feladatból: van* 7 *vagy* 8 *elemű normálosztó*

$$56 \triangleleft 7 \triangleleft \{e\} \quad vagy \quad 56 \triangleleft 8 \triangleleft \{e\}$$

egy normállánc. Faktorai

$$56 \overset{8}{\triangleleft} 7 \overset{7}{\triangleleft} \{e\} \quad vagy \quad 56 \overset{7}{\triangleleft} 8 \overset{8}{\triangleleft} \{e\}$$

7 *elemű csoport mindig ciklikus, ezért Ábel* ✓

Be kell látni, hogy egy 8 *elemű csoport mindig feloldható.*

Tudjuk, hogy prím-hatvány rendű ⇒ *centruma nem triviális.*

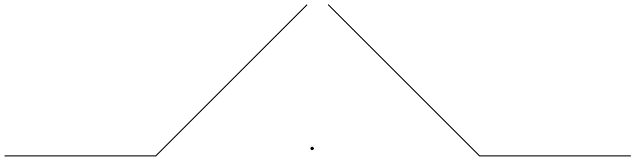
$$8 \overset{2 \ vagy \ 4}{\triangleleft} Z \overset{2 \ vagy \ 4}{\triangleleft} \{e\}$$

p^2 *rendű csoport pedig nemhogy feloldható, hanem Ábel (házi).* □

4. Feladat.

$$D_4 = \left\{ f, t \middle| f^4 = t^2 = e, tf = f^3 t \right\}$$

A D_4 *csoport ezt teljesíti és a generátum több elemű nem lehet, mert az utolsó azonossággal az összes eleme* $t^n f^m$ *alakra hozható* ($n \in \{0, 1\}, m \in \{0, 1, 2, 3\}$). □

5. Feladat. *Mutatunk nullosztókat:*  = 0 □

6. Feladat. *A faktorban két elem ekvivelens, ha* $a - b \in (x^2)$, *azaz a polinomok különbsége* x^2*-nek többszöröse. Azaz ha a konstans és első fokú tagjuk megyegyezik.*

$$\mathbb{R}[x]/(x^2) = \{a_0 + a_1 x | a, b \in \mathbb{R}\}$$